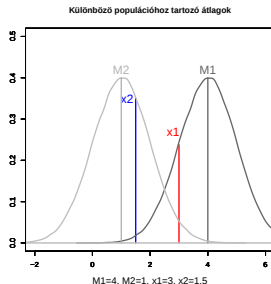
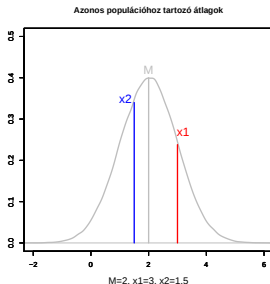


A középérték és variancia azonosságának próbái:
 t -próba, F -próba
Logikai vektorok az R-ben

Hipotézisállítás

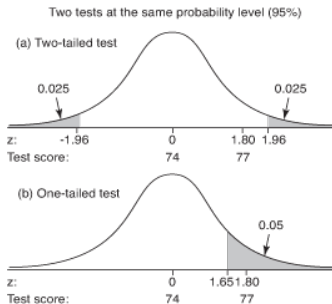
- ▶ Feltételezés: a minta egy adott szempont alapján más populációhoz tartozik, mint b minta.
- ▶ Nullhipotézis (H_0): a minta és b minta egyazon populációhoz tartozik, azaz az átlaguk ugyanazon μ populációátlag körül szór.
- ▶ Ellenhipotézis (H_1): p valószínűséggel állítható, hogy b minta átlaga nem ugyanahhoz a populációhoz tartozik, mint az a minta.



Hipotézis tesztelése $p = 95\%$ -os megbízhatósággal

1. H_1 : a nagy valószínűséggel **eltér** b -től.

H_0 : a és b ugyanazon populáció része. Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény két szélén $\alpha/2$ -be esik $\Rightarrow$ kétoldali teszt (felső ábra).



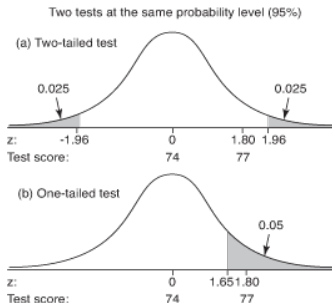
Hipotézis tesztelése $p = 95\%$ -os megbízhatósággal

1. H_1 : a nagy valószínűséggel **eltér** b -től.

H_0 : a és b ugyanazon populáció része. Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény két szélén $\alpha/2$ -be esik $\Rightarrow$ kétoldali teszt (felső ábra).

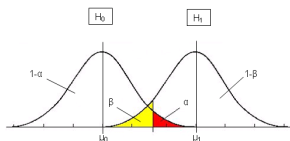
2. H_1 : a nagy valószínűséggel **nagyobb**, mint b .

H_0 : b nem kisebb, mint a . Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény jobb szélén α -ba esik $\Rightarrow$ egyoldali teszt (alsó ábra).



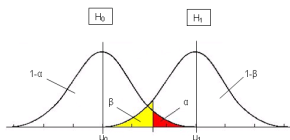
Hibatípusok

1. **α -hiba (első fajta, elsőfajú hiba):** elutasítjuk H_0 -t, mert az átlag a megadott konfidenciaintervallumon kívül esik $\rightarrow \alpha$ része (piros tartomány).
2. **β -hiba (második fajta, másodfajú hiba):** megtartjuk H_0 -t, holott az átlag más populációhoz tartozik (sárga tartomány).



Hibatípusok

1. **α -hiba (első fajta, elsőfajú hiba):** elutasítjuk H_0 -t, mert az átlag a megadott konfidenciaintervallumon kívül esik $\rightarrow \alpha$ része (piros tartomány).
2. **β -hiba (második fajta, másodfajú hiba):** megtartjuk H_0 -t, holott az átlag más populációhoz tartozik (sárga tartomány).



	H_0 -t megtartjuk	H_0 -t elvetjük
H_0 igaz	helyes döntés	α -hiba (álpozitív)
H_1 igaz	β -hiba (álnegatív)	helyes döntés

Összehasonlítás alapjai

- ▶ **Átlagok,**
- ▶ **szórások,**
- ▶ minta populációval $\leftrightarrow$ minta mintával,
- ▶ azonos varianciák $\leftrightarrow$ eltérő varianciák,
- ▶ független $\leftrightarrow$ párosított minták,
- ▶ parametrikus $\leftrightarrow$ ordinális vagy nem normális eloszlású minták.

Ha a populáció σ szórása ismert: átlagok z-eloszlás (= standard normális eloszlás) szerint szórnak μ körül.

Gyakorlatban: a populáció szórása nem ismert, ezért a mintaátlag szórását a Student-féle t eloszlással jellemezzük.

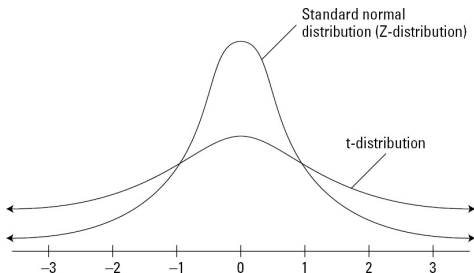
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$\sim$ normalizálás a z értékre, de σ helyett s .

t -eloszlás

Jellemzők:

- ▶ Szimmetrikus, átlaga 0, aszimptotikus, de nem normális eloszlású.
- ▶ Függ a minta méretétől, n -től.
- ▶ A t -eloszlás laposabb, mint $z \Rightarrow$ adott szignifikanciaszint határértékei messzebb esnek az átlagtól.
- ▶ $n = \infty$ esetén t eloszlás azonos z eloszlással.
- ▶ $n \geq 100$ esetén a különbség elhanyagolható, z -értékeket lehet használni.



Szabadsági fokok

Szabadsági fok, *degree of freedom*, df : a szabadon változtatható elemek száma, ami mellett a minta egy adott tulajdonsága változatlan marad.

Pl. egy $n = 5$ elemű minta átlaga $\bar{x} = 10$. Hány elem változtatható szabadon a mintaátlag változatlansága mellett?

Szabadsági fokok

Szabadsági fok, *degree of freedom*, df : a szabadon változtatható elemek száma, ami mellett a minta egy adott tulajdonsága változatlan marad.

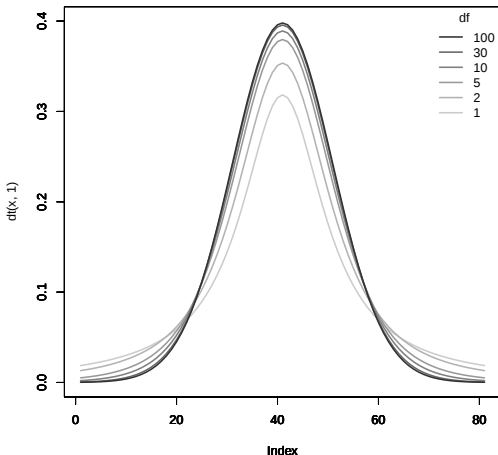
Pl. egy $n = 5$ elemű minta átlaga $\bar{x} = 10$. Hány elem változtatható szabadon a mintaátlag változatlansága mellett?

Négy, hiszen az ötödik elemet úgy kell kiválasztani, hogy a minta átlaga 10 maradjon, vagyis csak négy elem változtatható szabadon.

Tehát $df = n - 1$.

t -eloszlás és szabadsági fokok

A t -eloszlás lapossága függ a szabadsági fokoktól. Minél nagyobb a szabadsági fok, annál közelebb esik a kritikus érték (= szignifikanciahatár, konfidenciaintervallum szélső értéke) az átlaghoz.



Egymintás Student-féle t -próba

- ▶ Feltétel: normális eloszlású változó, ismeretlen szórással.
- ▶ Alkalmazás: populáció vagy nagyszámú referenciaminta átlaga ismert, pl. $IQ = 100$.
- ▶ Eljárás: ha $t_{minta} > t_{1-\alpha(n-1)} \Rightarrow H_0$ elvetése.

A Kincskereső óvodába 60 okos és ügyes gyerek jár. Átlagos IQ-juk 108, a szórás 10. Okosabbak-e az oda járó gyerekek az átlagnál?

Feladat

Átlag: 108, populáció átlaga: 100, szórás: 10, elemek száma 60.

$$t_{minta} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 100}{10/\sqrt{60}} = \frac{8}{1,29} = 6,2$$

Kritikus értékhez tartozó t meghatározása ($p = 1 - \alpha = 0,95$):
adott kvantilishez (0,95) tartozó t -érték 59-es szabadsági fok
mellett:

$qt(p, df)$, itt: $qt(0.975, 59) \rightarrow 2,000995$

Feladat

Átlag: 108, populáció átlaga: 100, szórás: 10, elemek száma 60.

$$t_{minta} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 100}{10/\sqrt{60}} = \frac{8}{1,29} = 6,2$$

Kritikus értékhez tartozó t meghatározása ($p = 1 - \alpha = 0,95$):
adott kvantilishez (0,95) tartozó t -érték 59-es szabadsági fok
mellett:

$qt(p, df)$, itt: $qt(0.975, 59) \rightarrow 2,000995$

Mivel $t_{minta} > t_{0.95(59)} \Rightarrow H_0$ -t elutasítjuk.

A Kincskereső óvodába tehát az átlagnál intelligensebb gyerekek
járnak, a különbség szignifikáns.

Kétmintás független t -próba

- ▶ Két minta alapján két ismeretlen μ értéket hasonlítunk össze.
- ▶ Minták kiválasztása egymástól független (pl. spanyol óvodások és cseh óvodások).
- ▶ Feltétel: normális eloszlás, azonos varianciák

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s}{n_1} + \frac{s}{n_2}}}$$

ahol s mindkét mintában azonos: a közös variancia becslése a mintánkénti szórásokból.

DE: a szórás egyenlőségét ritkán állíthatjuk biztosan!

Welch-próba

Mint a kétmintás független t -próba, de nem feltételezzük a varianciák egyenlőségét.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Eltér-e az alábbi mintában a nőstény és hím borjak születéskor mért testtömege?

bika (kg)	46	37	39	37	33	48	35		
üsző (kg)	27	37	35	41	35	34	43	38	40

bika = c(46,37,39,37,33,48,35)

uszo = c(27,37,35,41,35,34,43,38,40)

Feladat

Normális eloszlásúak-e a minták?

```
shapiro.test(bika), shapiro.test(uszo)
```

Ha p az adott szignifikanciaszintnél nagyobb, elfogadjuk a normális eloszlás feltételezését.

Két minta összehasonlítása t -próbával:

```
t.test(bika,uszo)
```

alapbeállítás: kétoldali (`alternative=two.sided`), varianciák nem egyenlőek (`var.equal=FALSE`).

Feladat

Normális eloszlásúak-e a minták?

```
shapiro.test(bika), shapiro.test(uszo)
```

Ha p az adott szignifikanciaszintnél nagyobb, elfogadjuk a normális eloszlás feltételezését.

Két minta összehasonlítása t -próbával:

```
t.test(bika,uszo)
```

alapbeállítás: kétoldali (`alternative=two.sided`), varianciák nem egyenlőek (`var.equal=FALSE`).

$p > 0,05 \Rightarrow$ különbség nem szignifikáns.

Kétmintás páros t -próba

A minta egyazon elem vagy összetartozó elemek kétszeri megfigyeléséből áll.

Feltétel: egy elem két értékének különbsége normális eloszlású, $n \geq 30$ esetén feltételezni szokás a normális eloszlást.

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d/\sqrt{n}}$$

ahol $\bar{d}$ a különbségek átlaga, s_d a különbségek becsült szórása, n a párok száma (tehát az elemszám, nem a mérések száma).

Feladat

ratings adatmátrix.

Növények és állatok méretére és súlyára adott átlagos becslések (meanSizeRating, meanWeightRating). Különböznek-e a méretre és súlyra adott becslések páronként?

Normális eloszlás tesztelése:

```
shapiro.test(ratings$meanSizeRating)
shapiro.test(ratings$meanWeightRating)
```

páros t -próba:

```
t.test(ratings$meanSizeRating, ratings$meanWeightRating,
paired=T)
```

$p \ll 0,001$, tehát a megkérdezettek az állatok és növények méretét szignifikánsan nagyobbra becslik egy adott skálán, mint a súlyukat.

Varianciára vonatkozó próbák

Tesztek és feltételeik (legalább) két minta esetén:

- ▶ **F-próba:** mindkét mintában normális eloszlás, független minták. R: `var.test()`.
- ▶ **Levene-próba:** közelítő próba, de normális eloszlás hiányában is használható, több mintára is. R: `levene.test` a `car` könyvtárban.
- ▶ **Bartlett-próba:** normális eloszlás, páros mintákra is használható. R: `bartlett.test()`.

Csomag telepítése: `install.packages("car"), library(car)`

Feladat

Töltsük le a trans.RData fájlt innen:

clara.nytud.hu/~mady/courses/statistics/materials/trans.RData

Letöltés `load("konyvtar/trans.RData")` függvénnel (NEM `read.table()`).

A mátrixban angol, ill. portugál, kb. 1500 szavas szövegek hossza van megadva, majd a másik nyelre való lefordítás utáni hosszuk.

Ellenőrizzük, hogy azonos-e az angol és portugál szövegek varianciája, majd teszteljük, azonos-e a hosszuk.

```
var.test(fuggovaltozo~fuggetlენvaltozo), azaz  
var.test(trans$length~trans$language)
```

```
t.test(fuggovaltozo~fuggetlენvaltozo), azaz  
t.test(trans$length~trans$language)
```

R

Logikai vektorok

Szűrés: próbák az adatmátrix adott feltételnek megfelelő elemeire.

Eljárás: az adatmátrixban egy adott változón belüli csoportok definiálása.

Operátorok:

==	azonos
!=	nem azonos
%in%	tartalmazza a vektor valamely elemét
< >	kisebb nagyobb
<>	nem egyenlő
	vagy
&	és

Logikai vektorok definíciója

```
z = ratings$Class == "plant"
```

```
z = magassag$height < 170
```

feltételt teljesítő sorok listázása:

```
ratings[z,]
```

összes elem feltételt teljesítő elemei vektorként:

```
ratings$Class[z]
```

Melyik elemekre igaz:

```
which(z)
```

Összes előfordulás:

```
sum(z)
```

Feladat

Növények és állatok ismertségi foka (meanFamiliarity):
pontdiagramm készítése az állatokra és a növényekre eltérő színnel.
A tengelyhosszok legyenek azonosak.

Feladat

Növények és állatok ismertségi foka (meanFamiliarity):
pontdiagramm készítése az állatokra és a növényekre eltérő színnel.
A tengelyhosszok legyenek azonosak.

logikai vektor: csak növények:

```
z = ratings$Class == "plant"
```

Növények [z] ábrázolása piros színnel:

```
plot(ratings$Frequency[z], ratings$meanFamiliarity[z],  
col="red", xlim=range(ratings$Frequency),  
ylim=range(ratings$meanFamiliarity))  
par(new=T)
```

állatok [!z] ábrázolása kék színnel

```
plot(ratings$Frequency[!z], ratings$meanFamiliarity[!z],  
col="blue", xlim=range(ratings$Frequency),  
ylim=range(ratings$meanFamiliarity))
```

range(): egy adott vektor terjedelme (min...max)

Feladatok

Boxplotok készítése adott csoportra: pl. növények között az egyszerű és összetett szavak gyakorisága.

Hasonlítsuk össze a bikák és üszők születési súlyának varianciáit a megfelelő tesztekkel. Milyen különbségeket látunk?

ratings adatmátrix:

Igaz-e, hogy a ratings mátrixban szereplő állatnevek gyakorisága alacsonyabb mértékű, mint a növényeké? És az ismertségük?

Milyen értéket vesz fel p , ha a növények és állatok súly- és méretbecslését külön-külön vizsgáljuk?

Teszteljük minden esetben, hogy az adatok normális eloszlásúak-e, és hogy a varianciák homogének (egyenlőek)-e.