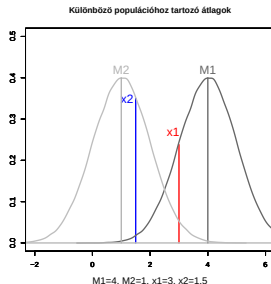
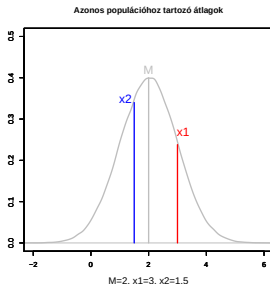


A középérték és variancia azonosságának próbái

t -próba, F -próba

Hipotézisállítás

- ▶ Feltételezés: a minta egy adott szempont alapján más populációhoz tartozik, mint b minta.
- ▶ Nullhipotézis (H_0): a minta és b minta **egyazon** populációhoz tartozik, azaz az átlaguk ugyanazon μ populációátlag körül szór.
- ▶ Alternatív hipotézis (H_1): p valószínűséggel állítható, hogy b minta átlaga **nem ugyanahhoz** a populációhoz tartozik, mint az a minta.

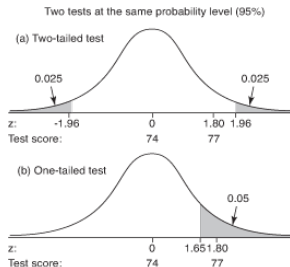


Hipotézis tesztelése 95%-os megbízhatósággal

Szignifikanciahatár: $\alpha = 0,05$.

1. H_1 : a átlaga szignifikánsan **különbözik** b -től.

H_0 : a és b ugyanazon populáció része. Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény két szélén $\alpha/2$ -be esik $\Rightarrow$ **kétoldali teszt** (felső ábra).



Hipotézis tesztelése 95%-os megbízhatósággal

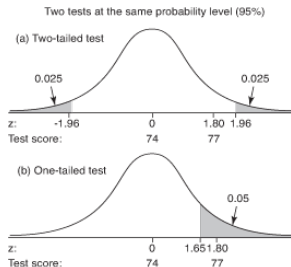
Szignifikanciahatár: $\alpha = 0,05$.

1. H_1 : a átlaga szignifikánsan **különbözik** b -től.

H_0 : a és b ugyanazon populáció része. Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény két szélén $\alpha/2$ -be esik $\Rightarrow$ **kétoldali teszt** (felső ábra).

2. H_1 : a szignifikánsan **nagyobb**, mint b .

H_0 : b nem szignifikánsan kisebb, mint a . Elutasítás: ha $\bar{x}$ a sűrűségfüggvény jobb szélén α -ba esik $\Rightarrow$ **egyoldali teszt** (alsó ábra).



Kétoldali és egyoldali teszt

A kétoldali teszt jellemzői:

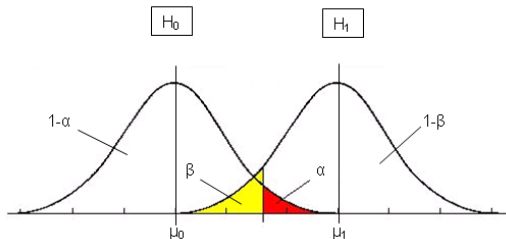
- ▶ Képes kimutatni, hogy a vizsgált minta átlaga szignifikánsan **kisebb VAGY nagyobb**, mint a populáció átlaga.
- ▶ A konfidenciaküszöb negatív és pozitív irányban **nagyobb** távolságra van az átlagtól, mint az egyoldali tesztnél.
- ▶ Ezért a nullhipotézis elutasításának valószínűsége **kisebb**.

Az egyoldali teszt esetén azt vizsgáljuk, hogy igaz-e, hogy *a* átlaga szignifikánsan eltér *b*-től egy **előre meghatározott** irányba. A nullhipotézis szerinte *a* átlaga nem tér el abba az irányba. Veszély: a másik irányba ettől eltérhet, de ez felderítetlen marad.

Egyoldali hipotézist csak akkor szabad alkalmazni, ha azt akarjuk kimutatni, hogy X termék/gyógyszer nem szignifikánsan rosszabb, mint Y termék. A teszt irányát az adatgyűjtést megelőzően kell meghatározni!

Hibás döntés okai

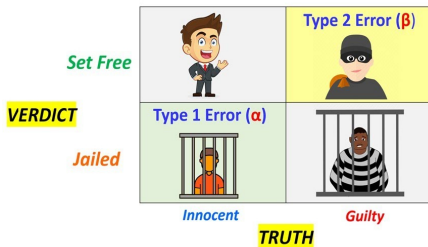
1. α -hiba (első fajta, elsőfajú hiba): elutasítjuk H_0 -t, mert az átlag a megadott konfidenciaintervallumon kívül esik $\rightarrow \alpha$ része (piros tartomány).
2. β -hiba (második fajta, másodfajú hiba): megtartjuk H_0 -t, holott az átlag más populációhoz tartozik (sárga tartomány).



Hibatípusok

	H_0 igaz	H_0 hamis, H_1 igaz
H_0 -t megtartjuk	helyes döntés	β -hiba (hamis negatív)
H_0 -t elvetjük	α -hiba (hamis pozitív)	helyes döntés

Az α -hiba vagy 1. típusú hiba súlyos következményekkel jár, mert bebörtönzünk egy ártatlan embert. Ezért igyekszünk kiküszöbölni (pl. kétoldali teszt használatával).



Lehetséges összehasonlítások

- ▶ **Átlagok,**
- ▶ **szórások,**
- ▶ egy minta populációval $\leftrightarrow$ két minta egymással,
- ▶ azonos varianciák $\leftrightarrow$ eltérő varianciák,
- ▶ független $\leftrightarrow$ párosított minták,
- ▶ parametrikus $\leftrightarrow$ ordinális vagy nem normális eloszlású minták.

Ha a populáció σ szórása ismert: átlagok z-eloszlás szerint szórnak μ körül.

Gyakorlatban: a populáció szórása nem ismert, ezért a mintaátlag szórását a Student-féle t eloszlással jellemezzük.

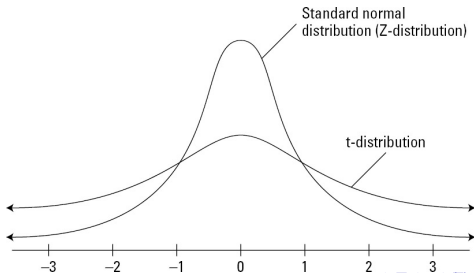
$$t = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s / \sqrt{n}}$$

$\sim$ normalizálás a z értékre, de a populáció σ szórása helyett a minta s szórása szerepel a képletben. μ_0 értéke két minta esetén a kontroll minta átlaga.

t -eloszlás

Jellemzők:

- ▶ Normális eloszlású: szimmetrikus, átlaga 0, aszimptotikus.
- ▶ A görbe meredeksége függ a minta méretétől, n -től.
- ▶ A t -eloszlás laposabb, mint a standard normális eloszlás z értéke $\Rightarrow$ adott szignifikanciaszint határértékei messzebb esnek az átlagtól.
- ▶ $n = \infty$ esetén a t -eloszlás azonos a z -eloszlással.
- ▶ $n \geq 100$ esetén a különbség elhanyagolható, mert a görbe egyre meredekebb, a nagy elemszám miatt z -értékeket lehet használni.



Szabadsági fokok

Szabadsági fok, *degree of freedom*, *df*: a szabadon változtatható elemek száma, ami mellett a minta átlaga változatlan marad.
Vagyis: ha más elemeket tartalmazna a mintánk, annak hány olyan eleme van, ami eltérhet a mostani mintától úgy, hogy az átlag ne változzon?

Pl. egy $n = 5$ elemű minta átlaga $\bar{x} = 10$. Hány elem változtatható szabadon a mintaátlag változatlansága mellett?

Szabadsági fokok

Szabadsági fok, *degree of freedom*, df : a szabadon változtatható elemek száma, ami mellett a minta átlaga változatlan marad. Vagyis: ha más elemeket tartalmazna a mintánk, annak hány olyan eleme van, ami eltérhet a mostani mintától úgy, hogy az átlag ne változzon?

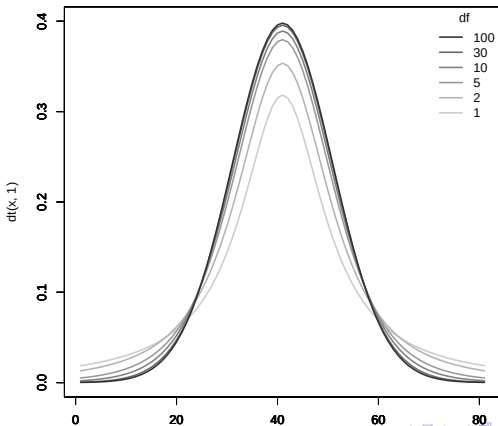
Pl. egy $n = 5$ elemű minta átlaga $\bar{x} = 10$. Hány elem változtatható szabadon a mintaátlag változatlansága mellett?

Négy érték változhat. Az ötödik elemet úgy kell kiválasztani, hogy a minta átlaga 10 maradjon, tehát csak négy elem változtatható szabadon.

Tehát $df = n - 1$.

t-eloszlás és szabadsági fokok

A t -eloszlás lapossága függ a szabadsági fokoktól. Minél nagyobb a szabadsági fok, annál közelebb esik a kritikus érték (a szignifikanciahatár, a konfidenciaintervallum szélső értéke) az átlaghoz. Vagyis nagyobb elemszám (és szabadsági fokok) esetén nő a nullhipotézis elutasításának lehetősége.



Egymintás Student-féle t -próba

- ▶ Feltétel: normális eloszlású változó, tetszőleges átlaggal és szórással.
- ▶ Alkalmazás: populáció vagy egy nagyszámú referenciaminta átlaga ismert, pl. $IQ = 100$.
- ▶ Eljárás: ha a minta átlag, szórás és elemszám alapján számított t -értéke kívül esik a populáció t -eloszlásának konfidenciaintervallumán, elutasítjuk a nullhipotézist.
- ▶ Képletben: ha igaz, hogy $t_{minta} > t_{1-\alpha(n-1)} \Rightarrow H_0$ -t elvetjük.

A Kincskereső óvodába 60 okos és ügyes gyerek jár. Átlagos IQ-juk 108, a szórás 15. Az IQ-teszt rögzített átlaga 100. Magasabb-e az oda járó gyerekek IQ-ja az átlagosnál?

Szignifikanciaküszöb értékének meghatározása

Keressük a konfidenciaintervallum küszöbértékeit a t -eloszlás görbéjén 95%-os szignifikanciaszint és 59 (azaz $60 - 1$) szabadsági fok esetén:

Kritikus értékhez tartozó t meghatározása ($p = 1 - \alpha = 0,95$).

Az adott szignifikanciaszinthez (0,95) tartozó t -érték 59-es szabadsági fok mellett kétoldali összehasonlítás esetén:

$qt(p, df)$, itt: $qt(0.975, 59)$

A t -eloszlás kritikus értéke pozitív és negatív irányban $|2,000995|$.

Azért 0,975 és nem 0,95 szerepel a képletben, mert megfelezzük $1 - 0,95$ valószínűségét, hogy az eloszlás negatív és pozitív végén a 0,05-ös α -érték **felét** vehessük figyelembe.

Kincskereső óvodások adatainak t -értéke

Átlag: 108, szórás: 15, elemek száma 60. A populáció átlaga: 100.

$$t_{minta} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 100}{15/\sqrt{60}} = \frac{8}{1,29} = 4,13$$

Az óvodásokra számolt t -érték a 2,0001-es küszöbértéknél **nagyobb**, tehát **kívül esik** a populáció átlagához tartozó konfidenciaintervallumon.

Következtetés: 0,05-nél kisebb az esélye, hogy ehhez a populációhoz tartozik a mintánk. Ezért a nullhipotézist a meghatározott 95%-os szignifikanciaszintet és az elemszámot figyelembe véve elutasítjuk.

Kincskereső óvodások adatainak t -értéke

Átlag: 108, szórás: 15, elemek száma 60. A populáció átlaga: 100.

$$t_{\text{minta}} = \frac{\bar{x} - \mu_0}{s/\sqrt{n}} = \frac{108 - 100}{15/\sqrt{60}} = \frac{8}{1,29} = 4,13$$

Az óvodásokra számolt t -érték a 2,0001-es küszöbértéknél **nagyobb**, tehát **kívül esik** a populáció átlagához tartozó konfidenciaintervallumon.

Következtetés: 0,05-nél kisebb az esélye, hogy ehhez a populációhoz tartozik a mintánk. Ezért a nullhipotézist a meghatározott 95%-os szignifikanciaszintet és az elemszámot figyelembe véve elutasítjuk.

A Kincskereső óvodában tesztelt gyerekek tehát kortársaik átlagához képest szignifikánsan intelligensebbek.

Kétmintás független t -próba

- ▶ Két minta alapján két ismeretlen μ értéket hasonlítunk össze.
- ▶ Minták kiválasztása egymástól független (pl. spanyol óvodások és cseh óvodások).
- ▶ Feltétel: normális eloszlás, azonos varianciák

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s^2}{n_1} + \frac{s^2}{n_2}}}$$

ahol s mindkét mintában azonos: a közös variancia becslése a mintánkénti szórásokból.

A próba előfeltétele, hogy a két minta szórása azonos legyen.

A varianciák azonosságát az F -próba segítségével ellenőrizhetjük.

Welch-próba

Mint a kétmintás független t -próba, de nem feltételezzük a varianciák azonosságát, azaz homogenitását.

$$t = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$$

Különbség: a nevezőben gyök alatt nem azonos, hanem eltérő szórás szerepel.

Normális eloszlás tesztje: `shapiro.test(minta1, minta2)`.

Varianciahomogenitás tesztje: `var.test(minta1, minta2)`.

Mindkét teszt nullhipotézise, hogy **IGAZ** a normális eloszlás, illetve a varianciahomogenitás megléte. Vagyis ha $p > 0,05$, akkor a minták eloszlása normális, illetve varianciáik azonosak.

Példa

Eltér-e az alábbi mintában a nőstény és hím borjak születéskor mért testtömege?

bika (kg)	46	37	39	37	33	48	35		
üsző (kg)	27	37	35	41	35	34	43	38	40

```
bika = c(46,37,39,37,33,48,35)
```

```
uszo = c(27,37,35,41,35,34,43,38,40)
```

1. lépés: normális eloszlásúak-e a minták külön-külön?

```
shapiro.test(bika), shapiro.test(uszo)
```

Ha p 0,05-nél **nagyobb**, elfogadjuk a normális eloszlás feltételezését.

2. lépés: azonosak-e a varianciák?

```
var.test(bika,uszo)
```

Ha p 0,05-nél **nagyobb**, elfogadjuk a varianciák azonosságának feltételezését.

Két minta összehasonlítása t -próbával:

```
t.test(bika,uszo)
```

alapbeállítás: kétoldali (`alternative=two.sided`), varianciák nem egyenlőek (`var.equal=FALSE`).

Két minta összehasonlítása t -próbával:

```
t.test(bika,uszo)
```

alapbeállítás: kétoldali (alternative=two.sided), varianciák nem egyenlőek (var.equal=FALSE).

A mintáinkban a varianciák azonosak, ezért használhatjuk a pontosabb, többnyire alacsonyabb p -értékhez vezető függvényt:

```
t.test(bika,uszo,var.equal=TRUE)
```

$p > 0,05 \Rightarrow$ a különbség nem szignifikáns egyik teszt esetében sem.

A p értéke azt mutatja, hogy mekkora valószínűséggel tévedünk, ha megtartjuk a nullhipotézist, vagyis azt, hogy a minták egyazon populációhoz tartoznak.

Kétmintás páros t -próba

A minta egyazon elem vagy összetartozó elemek kétszeri megfigyeléséből áll, például pulzus reggel és este egyazon személynél.

Feltétel: egy elem két értékének különbsége normális eloszlású, $n \geq 30$ esetén feltételezni szokás a normális eloszlást.

$$t = \frac{\bar{d}}{s_d / \sqrt{n}}$$

ahol $\bar{d}$ a különbségek átlaga, s_d a különbségek becsült szórása, n a párok száma (tehát az elemszám, nem az összes mérés száma, mert az kétszer annyi).

Itt voltaképpen azt teszteljük, hogy igaz-e, hogy az egyazon elemen végzett két mérés különbségének átlaga páronként 0, vagyis a mérések nem különböznek szisztematikusan egyik irányban sem.

Feladat

ratings adatmátrix.

Növények és állatok nevének gyakorisága és ismertsége (Frequency, meanFamiliarity). Különböznek-e a méretre és súlyra adott becslések páronként?

Normális eloszlás tesztelése:

```
shapiro.test(ratings$Frequency)
shapiro.test(ratings$meanFamiliarity)
```

páros t -próba:

```
t.test(ratings$Frequency, ratings$meanFamiliarity,
paired=T)
```

$p \ll 0,001$, tehát a megkérdezettek az állatok és növények méretét szignifikánsan nagyobbra becslik egy adott skálán, mint a súlyukat.

Feladat

Töltsük le a trans.RData fájlt innen közvetlen eléréssel:

```
load(url("phon.nytud.hu/mady/courses/statistics/materials/trans.RData"))
```

A mátrixban angol, ill. portugál, kb. 1500 szavas szövegek hossza van megadva, majd a másik nyelre való lefordítás utáni hosszuk.

Ellenőrizzük, azonos-e az angol és portugál szövegek varianciája, majd teszteljük, szignifikánsan különböznek-e.

```
var.test(fuggovaltozo~fuggetlენvaltozo), azaz
```

```
var.test(trans$length~trans$language)
```

```
t.test(fuggovaltozo~fuggetlენvaltozo), azaz
```

```
t.test(trans$length~trans$language)
```


Házi feladat

Végezzük el a megfelelő próbákat az évszakok adatmátrixra.
Normális az eloszlása a tavaszra és az ősze adott pontszámoknak?
Azonosak a varianciák? Ha az eloszlások normálisak, melyik t -próbát lehet elvégezni rajtuk?

Készítsünk pontdiagramot, amiben az évszakok külön-külön színnel vannak ábrázolva. Az x tengelyen a válaszadók kora, az y tengelyen az általuk adott pontszám szerepeljen. Van különbség a két évszakra adott pontszámokban a kor megoszlása szerint?