Korrelációs együtthatók
Ábrák az R-ben

Változók típusai

Független változó: A minta jellemzésére szolgáló mérőszám, gyakran a minta összeállításának szempontja is.
Független változók: kategoriális változók (nem, anyanyelv), ordinális változók (kor: fiatal, közép, éltes), metrikus változók (évek száma, kockán látható pöttyök).

Függő változó: A kísérlet hipotéziseinek tesztelésére szolgáló mérőszám.
Függő változók: számszerű változó, statisztikai teszt alapja, ordinális (pl. természetességi ítéletek) vagy metrikus (pl. távolságok, hőmérsékletek, gyakoriságok).

Változók összefüggései

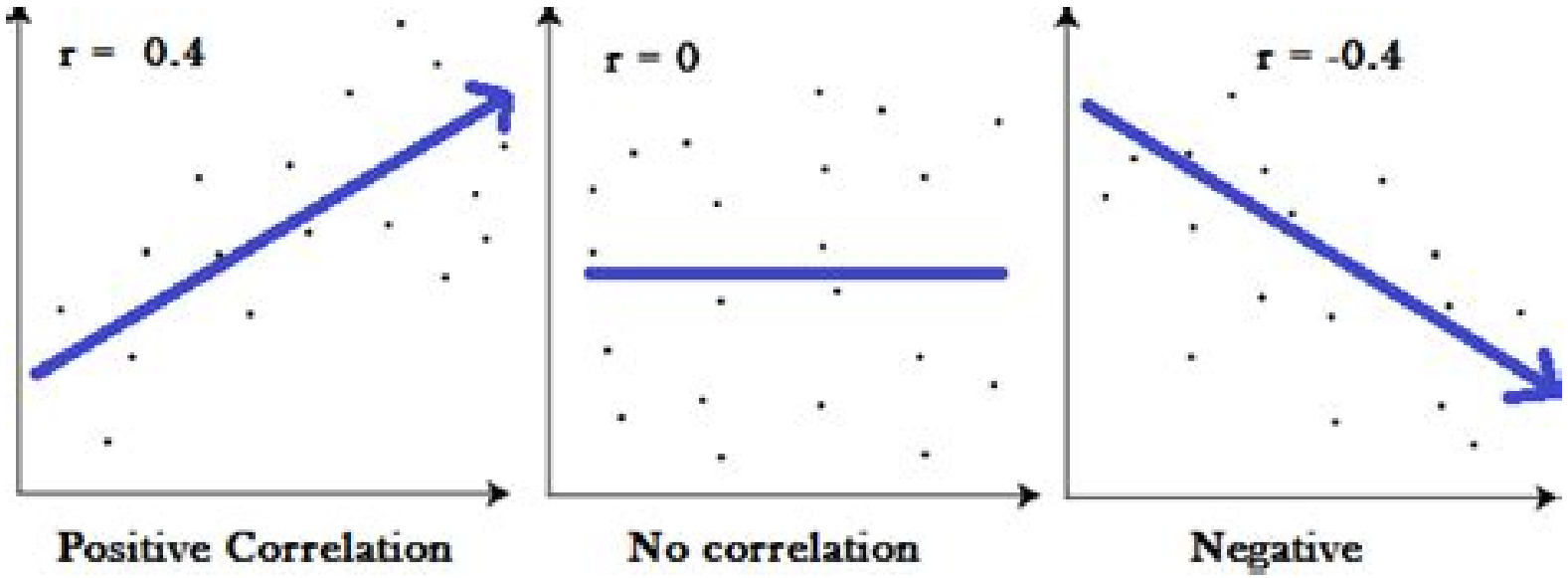
Ha két legalább ordinális függő változónk van, vagy egy legalább ordinális független és egy legalább ordinális függő változónk, a kettő összefüggései kifejezhetőek korrelációs együtthatókkal. Lehetséges összefüggések *a* független és *b* függő változók között:

- Ahogy *a* növekszik, úgy nő *b* is.
- Ahogy *a* növekszik, úgy csökken *b*.
- A két változó között nem látszik összefüggés.

Erős korreláció lehetséges értelmezései:

1. *b* függő változó *a* független változó következménye. Klasszikus példa: iskolapadban eltöltött évek száma és éves jövedelem.
2. A két változó egy harmadik, figyelmen kívül hagyott vagy még ismeretlen változó függvénye. Híres példa: gólyák száma és születések száma (mindkettő csökkenő tendenciát mutat).

Korreláció erőssége és iránya



Korrelációs együttható értelmezése

Tartomány: -1 és $+1$ között.

- Ha a két változó szorosan összefügg, a korrelációs együttható $+1$-hez közelít.
- Ha a két változó között szoros fordított összefüggés áll fent, a korrelációs együttható -1-hez közelít.
- Ha a két változó között nincs összefüggés, az együttható értéke 0 körül mozog.

Együtthatók: Kendall-féle τ vagy Spearman-féle ρ ordinális adatokra, Pearson-féle r metrikus adatokra.

Korrelációs együtthatók: Kendall-féle τ (tau)

Ordinális adatok mérőszáma, -1 és $+1$ közötti tartományra esik.

- Előny: kis elemszám esetén megbízhatóbb, mint ρ.
- Hátrány: négyzete nem fogható fel determinációs együtthatóként (lásd ρ és r).

Eljárás: elemek sorrendjének „jósága”, osztva a lehetséges párok számával.

Proverzió (P): y vektor elemeinek száma, amelyek a várt sorrendbe illeszkednek.

Inverzió (I): az a halmazhoz rendelt b értékeknél a várt sorrendtől való eltérés.

Két halmaz: $a = [1, 2, 3, 4], b = [21, 13, 36, 44]$

proverziók és inverziók száma: $P_{b1} = 2, I_{b1} = 1, P_{b2} = 2, P_{b3} = 1$

lehetséges párok száma: $\frac{n(n-1)}{2}$

$$\tau = \frac{P-I}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{5-1}{6} = 0,66666666667$$

Spearman-féle *Rho*

Ha az egyik vagy mindkét változó ordinális: Spearman-féle ρ.

Eljárás: mindkét változó értékeit sorrendbe állítjuk, eltérések különbségét (d) négyzetre emeljük és összegezzük, majd az alábbi képlet szerint számítjuk ki:

$$\rho = 1 - \frac{6 \sum d_i^2}{n(n^2-1)}$$

Példa

IQ és a tévénézéssel töltött órák száma.

IQ	óra	x sorszáma	y sorszáma	d	d^2
86	1	1	1	0	0
97	20	2	6	-4	16
99	28	3	8	-5	25
100	27	4	7	-3	9
101	50	5	10	-5	25
103	29	6	9	-3	9
106	7	7	3	4	16
110	17	8	5	3	9
112	6	9	2	7	49
113	12	10	4	6	36

$$\rho = 1 - \frac{6*194}{10*(100-1)} = 1 - \frac{1164}{990} = -0,175757$$

Kovariancia

Ha két mérőszám (x, y) függ egymástól, akkor ha x eltér x átlagától, akkor y is el fog térni y átlagától pozitív vagy negatív irányba.

Eljárás:

1. Kiszámítjuk minden egyes pont átlagtól való eltérését.
2. Összegezzük az eltéréseket.
3. Ha a teljes populáció rendelkezésünkre áll: összeget elosztjuk az összes elem számával, *n*-nel.
4. Ha populáció helyett mintával dolgozunk, *n-1*-gyel osztunk, mert a minta kovarianciája csak közelítő értéket ad.

$$\sigma_{x,y} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}) * (y_k - \bar{y})$$

A kovariancia alsó értéke 0, a felső pedig végtelen.

Szórás (standard deviation, SD)

A korreláció erősségénél figyelembe kell vennünk a két mérőszám szóródását: viszonylag szorosan csoportosulnak az átlag körül, vagy nagy terjedelemben?

A metrikus skála szóródásának mérőszáma a szórás. Alapja: az egyes pontok átlagtól való eltérése, ezek négyzetre emelése és összeadása. Majd, mivel négyzetre emeltük a különbségeket, az összegekből gyököt vonunk.

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}$$

A szórás jelentőségéről a normális eloszlás kapcsán részletesen lesz szó.

Kovariancia standardizálása

A korreláció jellemzésére szükség van egy mérőszámra, ami független a mintamérettől és a mintaátlagtól.

Koordinátarendszer origója $\leftarrow$ átlag. Kovariancia osztása a két változó szórásának szorzatával.

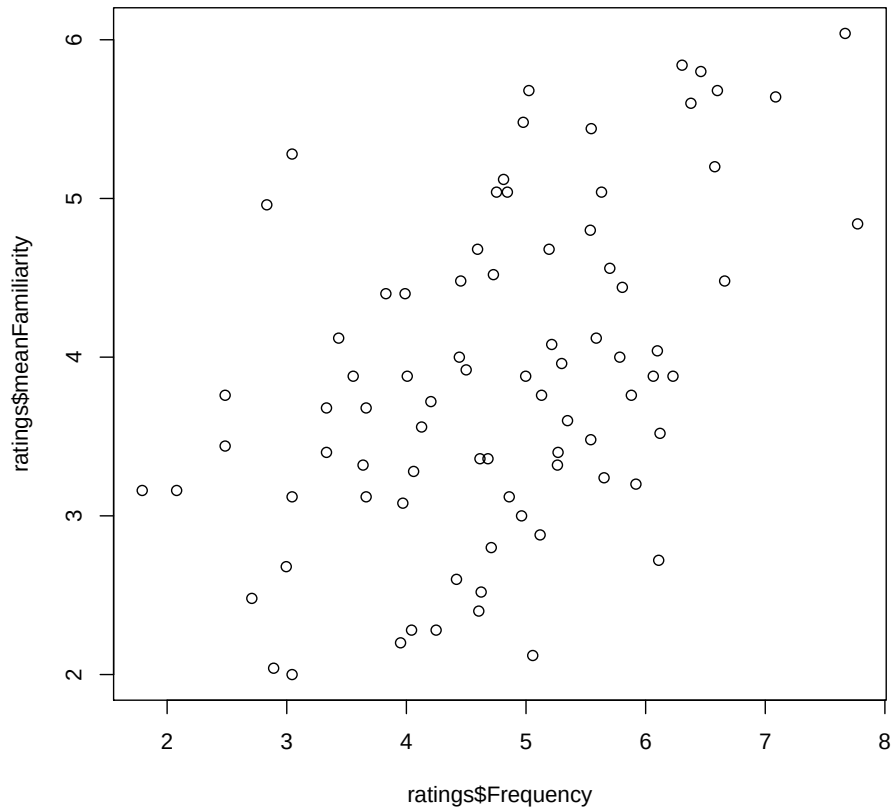
Pearson-féle r:

$$r = \frac{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x}) * (y_k - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2} * \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (y_k - \bar{y})^2}}.$$

A Pearson-féle r normális eloszlású parametrikus adatok korrelációs együtthatója. Minimum értéke –1, maximuma +1.

Példa

Angol beszélőket megkérdeztek, hogy mennyire jól ismernek bizonyos növényeket és állatokat. Az ismertségi fokot 7-es skálán adták meg. Függ-e az ismertségi fok a szavak (növény- vagy állatnév) gyakoriságától?



Példa

Szógyakoriság parametrikus. A 7-es skálát a gyakorlatban parametrikusnak szokás tekinteni, ha ekvidisztánsak, azaz két szomszédos érték távolsága egyenlőnek tekinthető.

Az ábrán látszik, hogy minél nagyobb x, annál nagyobb $y \rightarrow$ pozitív korreláció.

$r = 0.48$

$\rightarrow$ erős pozitív korreláció.

Korreláció erőssége

r értelmezése

$+0{,}70$ és 1 között: nagyon erős pozitív összefüggés
$+0{,}40$ és $0{,}69$ között: erős pozitív összefüggés
$+0{,}30$ és $0{,}39$ között: közepesen erős pozitív összefüggés
$+0{,}20$ és $0{,}29$ között: gyenge pozitív összefüggés
$+0{,}19$ és $-0,19$ között: nincs vagy elhanyagolható összefüggés
$-0,20$ és $-0,29$ között: gyenge negatív összefüggés
$-0,30$ és $-0,39$ között: közepesen erős negatív összefüggés
$-0,40$és $-0,69$ között: erős negatív összefüggés
$-0,70$ és -1 között: nagyon erős negatív összefüggés

Itt lehet gyakorolni pontdiagramok alapján az együttható megtippelését:
https://correlation.streamlit.app/

Determinációs együttható

d**:** a mért y értékek varianciájából mekkora részt (hány százalékot) magyaráz meg a regressziós becslések varianciája, vagyis a regressziós becslés milyen mértékben mutatja meg a b változó viselkedését.

Ha az összefüggés lineáris, az együttható: r^2.

Előbbi példa:

$d = r^2 = 0,48^2 = 0,2304$

Azaz: az összefüggés 23%-ban magyarázza meg y változó viselkedését x függvényében.

R

Házi feladat

Nemek eloszlása
számmal `table(evszakok$nem)`
kördiagrammal `pie(table(evszakok$nem))`.

Korok módusza, mediánja és átlaga
`median(evszakok$kor)`
`mean(evszakok$kor)`

A módusznak nincs külön függvénye, a táblázat leggyakoribb értékét kell megtalálni. Ehhez legjobb oszlopdiagramot készíteni, mert akkor az is látszik, hogy unimodális-e az eloszlás.

`barplot(table(evszakok$kor))`

Házi feladat

Interkvartilis félterjedelem megállapítása dobozdiagram készítésével
`boxplot(kor~nem, data = evszakok)`

Az interkvartilis félterjedelem a doboz alsó és felső szélének a fele.
A férfiaknál a medián (vízszintes fekete vonal) ehhez képest valamivel alacsonyabb, a nőknél pedig sokkal.

Kumulatív gyakoriságok
`barplot(cumsum(table(evszakok$pontszam)))`

Látszik, hogy az értékek nem egyenletesen nőnek: a 10 pont alatti ritkábbak. 11 ponttól meredekebb (gyorsabb) a növekedés. Erre egyébként a 15 pontos medián is utal. Ha egyenletes lenne a növekedés, 10 körüli medián pontszámot várnánk.

Programcsomagok telepítése az R-ben

Mivel az R nyílt forráskódú szoftver, bárki fejleszthet hozzá csomagokat. Elérhető csomagok listája az R mirror oldalakon, Packages menüpont alatt.
Telepítés interneten keresztül:
`install.packages("languageR")`
mirror kiválasztása (minél közelibb, annál kevesebb adatforgalmat generálunk).

Linux: csomagokat érdemes superuser-ként telepíteni, akkor a root könyvtárból bárhonnan elérhetők lesznek. Vagyis az R megnyitása: `sudo R`.

Windows 10: R megnyitása rendszergazdaként.

Csomag betöltése

betöltés (R megnyitása után minden egyes alkalommal):
`library(languageR)`
Ha $>$ jelet kapunk „válaszként”, akkor a csomag betöltődött az R-be.

Ellenőrzés:
`search()`
aktuálisan betöltött csomagok listája.
Elérhető objektumok listája és rövid leírása: languageR telepítésének könyvtárában, az INDEX fájlban.

Kétváltozós összefüggések ábrázolása

languageR könyvtár `ratings` objektuma.
`names(ratings)`: változók (oszlopok) neve.
`head(ratings), tail(ratings)`: első hat és utolsó hat sor (= eset, record).
Hipotézis: A rövidebb állat- és növénynevek gyakoribbak.

Ábrázolás:
`plot(ratings$Length,ratings$Frequency)`
első érték: x-tengely, második érték: y-tengely.

Korrelációs együtthatók:
`cor.test(ratings$Length,ratings$Frequency)`
`method = "pearson" -- default, alternatív:`
`"spearman", "kendall")`

R érzékeny a kis- és nagybetűkre! Elnevezést lehet rövidíteni, ha különbség egyértelmű, itt elég "p", "s", "k".

Grafikus paraméterek

Rengeteg paraméteren lehet állítani. Hogyan lehet ezekről tudni?

- grafikus parancs opcionális argumentumai. Lekérdezés: `?boxplot, ?plot, ?barplot` stb.
- parancsok súgója gyakran utal további hasznos parancsokra, pl. `line(),title(),abline()` stb.
- `par()`: rengeteg paraméter, pl. tengelyek feliratozása (felirat mérete, elhelyezése, egységek mérete), tengelyek aránya stb.

Első lépés súgó. Felépítés: (1) kötelező és opcionális argumentumok listája, (2) argumentumok rövid magyarázata, (3) részletek: többnyire innen derül ki a releváns infó, ha még nem ismerjük a parancsot, gyakran hivatkozások is, (4) lásd még - hasznos, esetenként hasznosabb, további parancsok, (5) példák - ezek általában túl bonyolultak, ezért nem túl hasznosak.

Néhány hasznos paraméter

- **xlab, ylab:** "x-tengely felirata", "y-tengely felirata".
- **main:** "Ábra címe".
- **xlim, ylim:** Ábrázolt értékek tól-ig. Főleg y-tengelynél fontos, ha összehasonlítható ábrákat akarunk. Pl százalékos ábrázolásnál `ylim = c(0,100)`, azaz 0–100%-ig. Egyenlőségjel előtti szóköz opcionális.
- **col:** színek, vagy névvel, vagy számmal. Pl. `col=2` és `col="red"` azonosak.
- **cex:** `cex.main,cex.axis,cex.names` stb. Default: cex=1, ehhez képest cím, mérőszámok, címkék betűmérete nagyobb (1.3, 1.7) vagy kisebb (0.7).

Ábra mentése

Mentés pdf-ként:

```
plot(blablabla)
dev.print("célfájl",device=pdf)
```

Mentés ábraként, pl. png (jpg és tif nem jó, mert képtömörítéssel készül!):

```
png(file = "fajlnev", bg = "white")
plot(blablabla)
dev.off()
```

Alternatíva Windows-os R-ben: menün keresztül.

Ha nem adunk meg elérési útvonalat: mentés aktuális könyvtárba (`getwd()` paranccsal megtudható).

Boxplotok

Ábrázolás módja: y-tengely: függő változó interkvartilis eloszlása, x-tengely: csoportok, esetleg további tagolással.

`boxplot(függőváltozó~függetlenváltozó)`
Ha további csoportosítás:
`boxplot(függőváltozó~csoport*függetlenváltozó)`

Például:
`boxplot(ratings$Frequency~ratings$Class*ratings$Complex)`
Egyszerű és összetett állat- és növénynevek gyakorisága.

Hasznos paraméterek:
`col=c("red","blue")` vagy `col=c(2,4)` – ugyanaz az eredmény.
`names=c("állat","növény")`

Házi feladatok

1. feladat: `ratings` fájlban található adatok alapján tetszőleges pontdiagramm készítése és mentése.

2. feladat: `ratings` fájlban található adatok alapján tetszőleges boxplot készítése.

Célábra: cím, angol vagy magyar nyelvű tengelyfelirat, színes ábrák.

3. feladat: két dobókockával dobunk 10-szer, 100-szor, 1000-szer. Mi a minták módusza, mediánja és átlaga? A három minta eloszlásának ábrázolása oszlopdiagrammal, hisztogrammal és dobozdiagrammal.