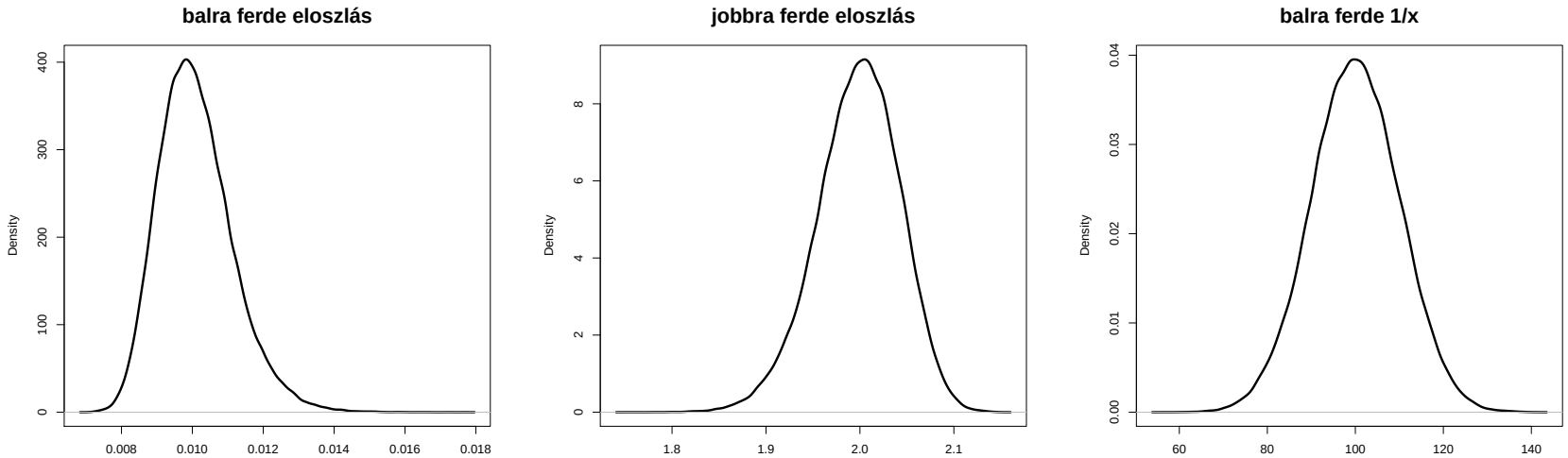
Valószínűség, pontbecslés, konfidenciaintervallum

Normális eloszlás tesztje

Kolmogorov-Szmirnov vagy Wilk-Shapiro próba.

R-funkció: `shapiro.test(vektor)`



Ha $p > 0,05$, elfogadjuk, hogy a minta normális eloszlású (ld. később).

Transzformációk

Unimodális, de nem szimmetrikus, azaz jobbra vagy balra ferde eloszlások gyakran átalakíthatóak normális eloszlásúvá.

Szokásos eljárások:

- $x = log(x)$
- $x = 1/x$
- $x = \sqrt{x}$
- ...

Valószínűség a mindennapokban

Köznyelvi jelentés: tapasztalat alapú becslés (n megfigyelt esetből hányszor történt meg egy adott esemény). Pl. „valószínűleg mindjárt elered az eső” (mert ha ilyen borús az ég, gyakran esik), „valószínűleg idén sem lesz fizetésemelés” (mert tíz éve nem volt).

A valószínűség soha nem jelent biztos tudást! Néha mégsem esik, ha borús az ég, és néha mégis van fizetésemelés.

Intuitív becslésnek kevés fokozata van: *nem túl valószínű, elég valószínű, nagyon valószínű, több mint valószínű*.

Valószínűség a szerencsejátékban

Fej vagy írás egy érme feldobásakor?

Megfigyelés: 10 dobás, 20, 30...

Valószínűség a szerencsejátékban

Fej vagy írás egy érme feldobásakor?

Megfigyelés: 10 dobás, 20, 30...

Fejek száma egyre jobban közelíti a 0,5-ös értéket.

Empirikus valószínűség P definíciója:

P = fej/összes dobás

ahol a dobások száma a végtelenhez közelít.

$\Rightarrow$ valószínűség értéke mindig 0 (egyáltalán nem valószínű) és 1 (biztos) között mozog.

Példák

1. Adott szám dobása kockával.
2. Ász húzása egy 32 lapos kártyapakliból.
3. Kétszer egymás után fej dobása.
4. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott magyar állampolgár katolikus, ha az összes megkérdezett közötti arány katolikus 51%, református 16%, evangélikus 3%, nem vallásos 14,5%.
5. Egy véletlenszerűen megkérdezett személy diplomás nő, ha a diplomások aránya 22,4%, és a nők aránya 50%.

Példák

1. Adott szám dobása kockával: adott szám/összes szám $= 1/6$ $= 0{,}1667$.

Példák

1. Adott szám dobása kockával: adott szám/összes szám $= 1/6 = 0{,}1667$.
2. Ász húzása egy 32 lapos kártyapakliból: ászok száma/összes kártya $= 4/32 = 0{,}125$.

Példák

1. Adott szám dobása kockával: adott szám/összes szám $= 1/6 = 0{,}1667$.
2. Ász húzása egy 32 lapos kártyapakliból: ászok száma/összes kártya $= 4/32 = 0{,}125$.
3. kétszer egymás után fej dobása:
   (fej+fej)+(fej+írás)+(írás+fej)+(írás+írás) $= 1/4 = 0{,}25$.

Példák

1. Adott szám dobása kockával: adott szám/összes szám $= 1/6 = 0{,}1667$.
2. Ász húzása egy 32 lapos kártyapakliból: ászok száma/összes kártya $= 4/32 = 0{,}125$.
3. kétszer egymás után fej dobása: **(fej+fej)**+(fej+írás)+(írás+fej)+(írás+írás) $= 1/4 = 0{,}25$.
4. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott magyar állampolgár katolikus, ha az összes megkérdezett közötti arány katolikus 51%, református 16%, evangélikus 3%, nem vallásos 14,5% stb.: 51% $= 0{,}51$.

Példák

1. Adott szám dobása kockával: adott szám/összes szám = 1/6 = 0,1667.
2. Ász húzása egy 32 lapos kártyapakliból: ászok száma/összes kártya = 4/32 = 0,125.
3. kétszer egymás után fej dobása: **(fej+fej)**+(fej+írás)+(írás+fej)+(írás+írás) = 1/4 = 0,25.
4. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy véletlenszerűen kiválasztott magyar állampolgár katolikus, ha az összes megkérdezett közötti arány katolikus 51%, református 16%, evangélikus 3%, nem vallásos 14,5% stb.: 51% = 0,51.
5. Egy véletlenszerűen megkérdezett személy diplomás nő, ha a diplomások aránya 22,4%, és a nők aránya 50%: 0,224*0,5 = 0,112.

Becslés

Inferenciális statisztika: oksági vagy relációs alapú statisztika. A minta értékei alapján következtet a populációra.

DE: a minta alapján a populációra csak **becsléseket** tehetünk.

1. probléma: különböző minták különböző átlagokat eredményeznek, még véletlenszerű kiválasztás esetén is.

2. probléma: véges az időnk, csak véges mintával tudunk dolgozni.

A normális eloszlás jelentősége

A normális eloszlás nem csak egy adott mintára lehet jellemző, hanem egy adott populációból vett több mintára is.

Feltételezés: n minta $\bar{x}$ átlagai normális eloszlást mutatnak a populáció μ átlaga körül, ha a populáció szórása σ.

A minták átlagának μ körüli szórása egyenlő az egyetlen minta alapján számolt standard hibával (*standard error*), azaz $se = \frac{s}{\sqrt{n}}$ -vel.

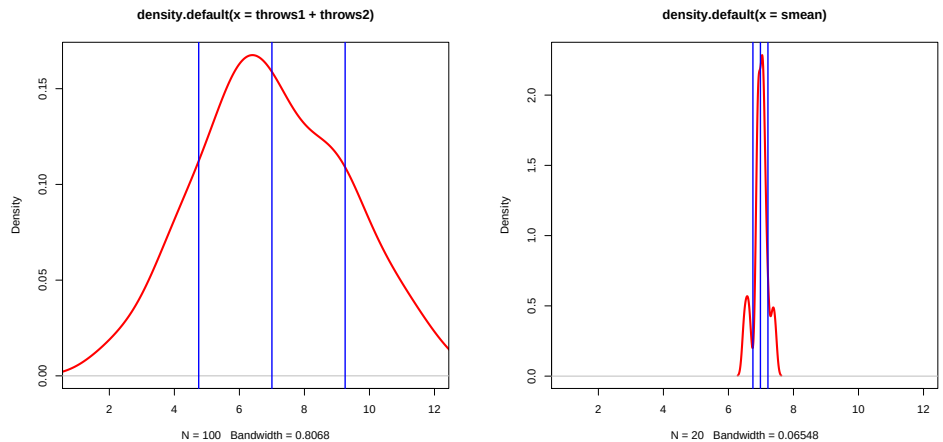
A szórás egyes adatpontok mintaátlagtól való távolságát fejezi ki.

A standard hiba a mintaátlagok populációátlagtól való távolságát fejezi ki.

Előny: egyetlen minta átlaga és szórása alapján következtethetünk a populáció ismeretlen értékeire.

A minta és a populáció szórása

Két kockával dobunk 100-szor.
Bal: egyetlen, 100 dobásból álló minta összegei. Jobb: 20 minta átlagai, amelyek egyenként 100 dobásból állnak.



Minta átlaga $= 7$, átlagok átlaga $= 6{,}98$.
Minta szórása $= 2{,}25$, átlagok szórása $= 0{,}23$.

Standard hiba EGYETLEN mintából számolva:
$2,25/\sqrt{100} = 0,225$
$\rightarrow$ a 20 mintából számolt szórás jó közelítése 20 minta híján is.

Pontbecslés

Véletlen minta átlaga függ a véletlentől, azaz egy **becsült pont**.

Mennyire megbízható a becslés egy véletlen minta alapján?

Példa: Megmérjük a COVITE Egyetem első évfolyam férfi hallgatóinak testmagasságát. A teljes populáció 300 főből áll. Ismerjük a populáció szórását és elemszámát.

$s = 6{,}3$ cm

Mi a populáció részmintáiból számolt átlagok szórása a teljes populáció átlaga körül?

A részmintákból számolt átlagok szórása kiszámolható a populáció szórásából és a minták elemszámából. A standard hiba képlete $se = \frac{s}{\sqrt{n}}$.

A tíz fős minták szórása a minta átlaga körül

$se = 6,3/\sqrt{10} = 1,99$ cm,
ötven fős mintáké
$se = 6,3/\sqrt{50} = 0,89$ cm, stb.

$\Rightarrow$ Minél nagyobb az elemszám, annál kisebb a standard hiba, azaz az egyes mintaátlagok annál jobban közelítik a populáció átlagát.

Feladat

Fájl letöltése:

http://phon.nytud.hu/mady/courses/statistics/materials/testmagassag.txt

300 férfi egyetemi hallgató testmagassága.

Testmagasság adatai testmagassag.txt nevű fájlban.
átlag: `mean()`
szórás: `sd()`
gyök: `sqrt()`

Hogyan számoljuk ki az első tíz fő testmagasságának átlagát?

Feladat

Fájl letöltése:

http://phon.nytud.hu/mady/courses/statistics/materials/testmagassag.txt

300 férfi egyetemi hallgató testmagassága.

Testmagasság adatai testmagassag.txt nevű fájlban.
átlag: `mean()`
szórás: `sd()`
gyök: `sqrt()`

Hogyan számoljuk ki az első tíz fő testmagasságának átlagát?
`mean(testmagassag$height[1:10])`

Teljes minta standard hibája?

Feladat

Fájl letöltése:

http://phon.nytud.hu/mady/courses/statistics/materials/testmagassag.txt

300 férfi egyetemi hallgató testmagassága.

Testmagasság adatai testmagassag.txt nevű fájlban.
átlag: `mean()`
szórás: `sd()`
gyök: `sqrt()`

Hogyan számoljuk ki az első tíz fő testmagasságának átlagát?
`mean(testmagassag$height[1:10])`

Teljes minta standard hibája?
`sd(testmagassag$height)/sqrt(300)`
0,36

Konfidenciaintervallum

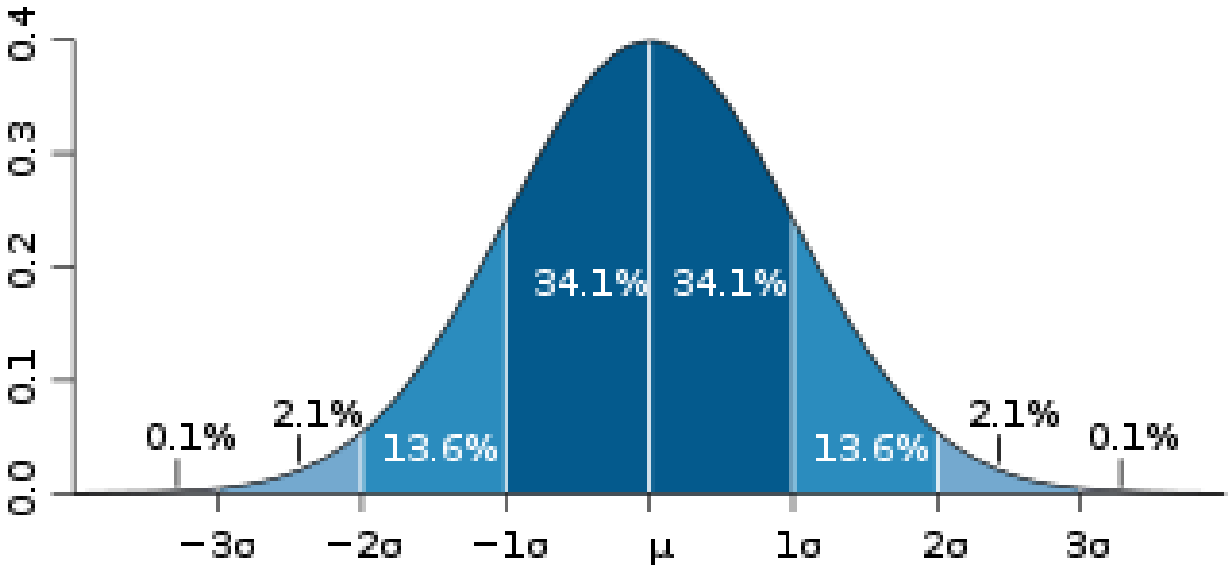
Kérdés: igaz-e, hogy a véletlen mintánk átlaga beleesik az ismeretlen populációátlag körül szóródó mintaátlagokba?

Nehézség: μ-t, vagyis a populáció átlagát általában nem ismerjük, csak $\bar{x}$-et, azaz a mintaátlagot. (Ebben a példában rendelkezésünkre áll a teljes populáció, hogy jobban érthető legyen a gondolatmenet.)
$\Rightarrow$ Döntés nem lehetséges, csak egy adott valószínűségi határon, azaz **konfidenciaintervallumon** belüli valószínűség megállapítása.

A konfidenciaszintet mi határozzuk meg önkényesen. A 95%-os szint azt jelzi, hogy a hipotézisről hozott döntésünk 95%-ban lesz megbízható. Jelölése: $p = 0,95$.

Kérdés: igaz-e, hogy a 10 elemű mintánk átlaga $\bar{x}$ 95%-os valószínűséggel beleesik az ismeretlen μ körül standard hibával szóródó mintaátlagok tartományába? Ehhez meg kell találnunk azt a két határértéket, amiken belül található a mintaátlagok 95%-a. Ezek határolják a 95%-os konfidenciaintervallumot.

Vagyis: a mintánk a populáció feltételezett eloszlásának két sötétebb kék tartományába esik, vagy a két szélső világosabba?



Kiindulás

- A populációból véletlenszerűen vett minták átlagai normális eloszlásúak.
- Normális eloszlás esetén az átlagok 95%-a a populáció átlagától $\pm$ 1,96 egységnyi szórást mutat. Az átlagok szórását a standard hibával jellemezzük, vagyis a $s/\sqrt{n}$ képlettel számoljuk ki.
- Keresssük μ-t, a populáció eloszlásának középpontját.

Tehát:

$p(-1,96 * se + \mu < \bar{x} < \mu + 1,96 * se) = 0,95$

Cél: a 95%-os konfidenciaintervallumon belüli határértékek meghatározása negatív és pozitív irányban.

Konfidenciaintervallum $\bar{x}$ alapján

$$p(-1,96 * se + \mu < \bar{x} < \mu + 1,96 * se) = 0,95$$

$$-\mu$$

$$p(-1,96 * se < \bar{x} - \mu < 1,96 * se) = 0,95$$

$$* -1$$

$$p(1,96 * se > \mu - \bar{x} > -1,96 * se) = 0,95$$

$$+\bar{x}$$

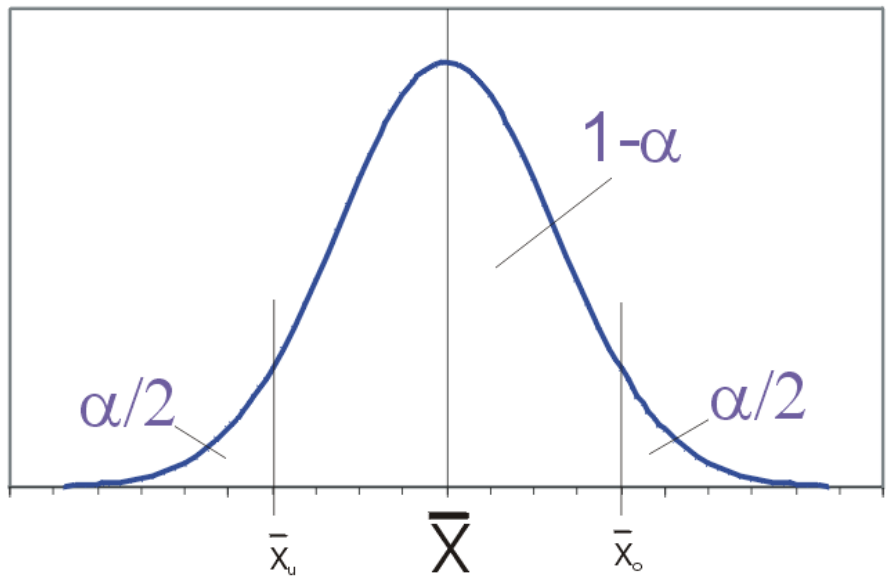
$$p(1,96 * se + \bar{x} > \mu > \bar{x} - 1,96 * se) = 0,95$$

$$p(-1,96 * se + \bar{x} < \mu < \bar{x} + 1,96 * se) = 0,95$$

Konfidenciaszint

Konfidenciaintervallum: értéktartomány, amely a becsülendő paramétert előre rögzített valószínűséggel tartalmazza.

Konfidenciaintervallumon kívüli tartomány: $\alpha = 1 - p$. α a humán tudományokban általában 0,05, vagyis 5%.



Ha $\bar{x}$ nem esik a 95%-os konfidenciaintervallumba, akkor is tartozhat az adott populációhoz! Tévedés valószínűsége 5%, ez az ún. alfa-hiba.

Kiindulási hipotézis tesztelése

Hipotézis állítása falszifikáción keresztül, azaz a kutatási hipotézisünk **ellenhipotézisét vagy nullhipotézisét,** H_0**-t** teszteljük.

Az empirikus vizsgálatokban általában abban vagyunk érdekeltek, hogy a vizsgált érték $1 - p$, azaz α tartományba essen, hiszen többnyire azt akarjuk igazolni, hogy a vizsgált populáció eltér egy másiktől.
$\Rightarrow$ A szignifikanciaszintet α értékével szokás megadni, azaz 0,05 vagy 5%.

Ha azt akarjuk bizonyítani, hogy egy adott minta NEM tartozik az adott p konfidenciaintervallumba, akkor a mintának negatív és pozitív irányban az $\alpha/2$, vagyis a két szélső tartományba kell tartoznia. Tehát egy szimmetrikus, azaz kétoldalas tesztnél az azonosság elutasítása 2,5%-ra teljesül.

A mintaméret jelentősége a hipotézistesztelés szempontjából

A $p = 0,95$-es konfidenciahatár kritikus értékei:

alsó kritikus érték: $-1.96 * se + \bar{x}$

felső kritikus érték: $+1.96 * se + \bar{x}$

A standard hiba kiszámítása:

$$se = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Ha n alacsony, a standard hiba nagyobb, mert a nevezőben $\sqrt{n}$ szerepel $\Rightarrow$ nagyobb standard hiba esetén a kritikus érték nagyobb lesz, ezért H_0 elutasításának lehetősége kisebb.

Feladat

Számoljuk ki a `testmagassag` R-objektum első tíz elemének átlagát. Beleesik a teljes, 300 elemű minta 95%-os konfidenciaintervallumába?

Első tíz elem átlagának kiszámítása:

Feladat

Számoljuk ki a `testmagassag` R-objektum első tíz elemének átlagát. Beleesik a teljes, 300 elemű minta 95%-os konfidenciaintervallumába?

Első tíz elem átlagának kiszámítása:

```
mean(testmagassag$height[1:10])
```

175.9037

95%-os konfidenciaintervallum határai?

Feladat

Számoljuk ki a `testmagassag` R-objektum első tíz elemének átlagát. Beleesik a teljes, 300 elemű minta 95%-os konfidenciaintervallumába?

Első tíz elem átlagának kiszámítása:

```
mean(testmagassag$height[1:10])
```

175.9037

95%-os konfidenciaintervallum határai?

Letöltjük a `gmodels` nevű R-csomagot, és lekérdezzük a határokat a
`ci` függvénnyel.

```
ci(testmagassag$height,0.95)
Estimate CI lower CI upper Std.  Error
178.0349657 177.3166967 178.7532346 0.3649871
```

Következtetés

Mintaátlag: 175,9 cm

Populáció konfidenciaintervalluma: 177,3 cm és 178,8 cm

Az első tíz elemből származó 175.9 cm-s mintaátlag KÍVÜL esik a teljes populációból számolt konfidenciaintervallumokon. A véletlen minta ugyan valójában része a populációnak, de a szélső 5%-os tartományba esik. Ezért el fogjuk utasítani a nullhipotézist, holott valójában a populáció része a mintánk – ez esetben téves döntést fogunk hozni. Ez az α-hiba.